Chap 1.3

无穷小与无穷大

1.3.1 概念

- 无穷小量

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，则称 $x\to a$ 时 $f(x)$ 为无穷小(量)

- 等价性

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-A \text{ 或 } |f(x)-A| \text{ 为无穷小}$$

- 无穷大量

若 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}=0$，则称 $x\to a$ 时 $f(x)$ 为无穷大(量)

- 无穷大有时有 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的情况，注意差别

例 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$

指数→+∞与→+∞
时，函数极限不同

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

- 若 $x\to a$ 时, $f(x)$为无穷小,那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大吗?
- 无穷小之和为无穷小，无穷小与有界量的积为无穷小

例 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

1.3.2 无穷小的比较

- 比较

若 $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0,$ 且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=l,$

当 $l=0$ 时， 称 $x\to a$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小

记为

$$\beta(x)=o(\alpha(x)),\quad x\to a$$

当 $l\neq 0$ 时， 称 $x\to a$ 时 $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小

特别 $l=1$ 时, 称 $x\to a$ 时 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 等价的无穷小

记为

$$\beta(x)\sim\alpha(x),\quad x\to a$$

例 比较下列无穷小

1) 当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{x}}$与$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2) 当$x\to 0$时，$\sin x$与x，$1-\cos x$与x^2

例 当$x\to 1$时，$k(1-x^2)$与$1-\sqrt{x}$为等价无穷小，求k

- 无穷小的阶

若$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$，且有$k>0$和$C\neq 0$，

$$\beta(x)\sim C\alpha^k(x),\quad (x\to a)$$

则称当$x\to a$时，$\beta(x)$是$\alpha(x)$的k阶无穷小

在无穷小进行运算或比较时，常取一个形式简单的无穷小作为“标准”

通常在 $x \to 0$时，取 x, 在 $x \to \infty$时，取 $\dfrac{1}{x}$

例如在$x \to 0$ 时

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \tan x \sim x$$

还有

$$\ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x$$

➢ 这意味着 若当$x \to a$时, $\Delta \to 0$, 那么

$$\sin\Delta \sim \Delta, \quad 1-\cos\Delta \sim \frac{1}{2}\Delta^2, \quad \tan\Delta \sim \Delta$$

$$\ln(1+\Delta) \sim \Delta, \quad e^{\Delta}-1 \sim \Delta, \quad (1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$$

$$\arcsin\Delta \sim \Delta, \quad \arctan\Delta \sim \Delta$$

□ 利用等价无穷小替换求极限

原则 求极限时，可将式子分子或分母的无穷小因子用等价无穷小替换

例 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{e^{2x}-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\ln(\cos x)}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2+3)\ln(\dfrac{x^2}{x^2+1})$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1+\sin x}{x}$

- 无穷小是代数式中的一项时，一般不能用等价无穷小替换

例 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ $(=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}$?)

例 当$x\to 0$ 时, $(1+kx^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,

试求 $k=$?

H.W

15　16 (2)

18　19　20 （均需说明理由）　21

补充题　求下列极限

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{\sin 3(x-a)}$　2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{k}{x}$　3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{\ln(1+3x)}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\tan 5x}$　5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\arcsin 3x}$

Chap 1.4

函数的连续

1.4.1 连续的概念

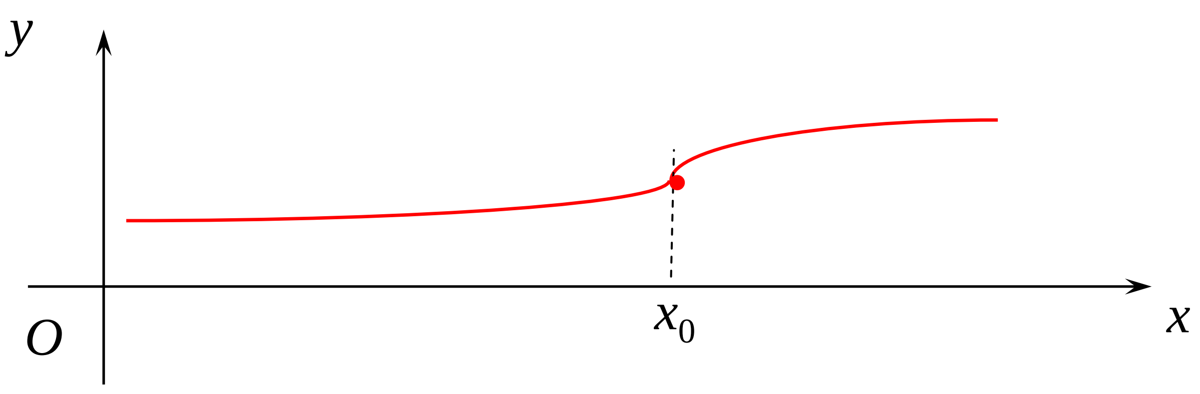
连续

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

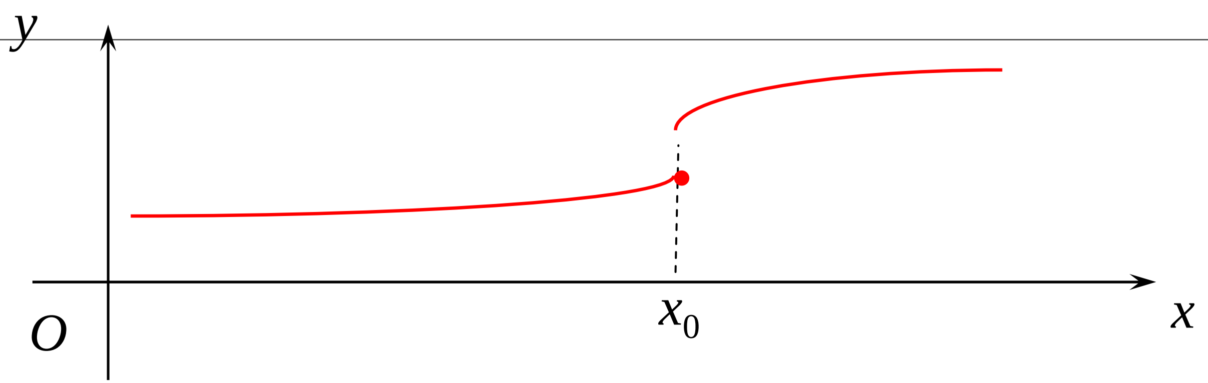
则称 $f(x)$ 在x_0 连续，否则称 $f(x)$在x_0 间断

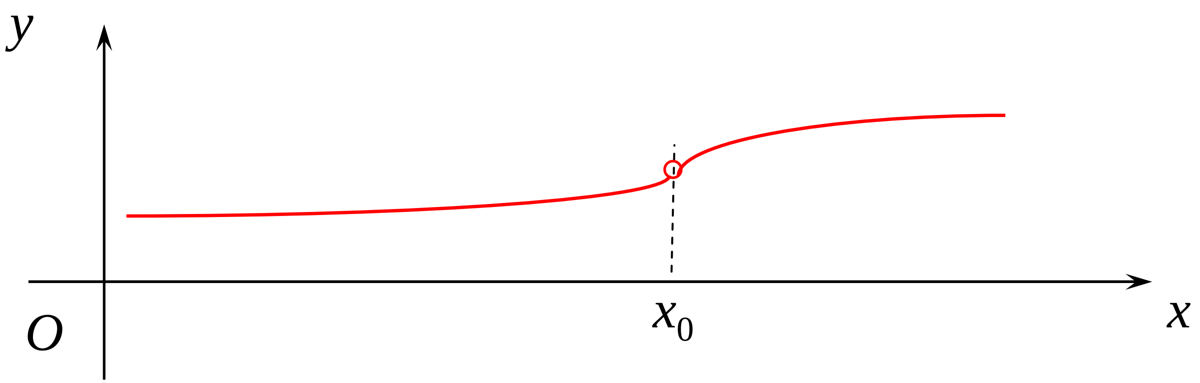
- 几何上很直观：反映曲线“连”或“断”

连续



间断





- 连续意味着

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在　(2) $f(x_0)$ 存在　(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- 记$\Delta x = x - x_0$, 为自变量的增量

相应有$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$为函数的增量

$$f \text{ 在} x_0 \text{ 连续} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

例　证明函数$f(x) = \sin x$在$x_0 \in \mathbf{R}$连续

□ 单侧连续

若$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$右连续

(类似有左连续概念)

- $f(x)$在x_0连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0左连续且右连续

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

例　函数 $f(x)$在 $x=0$连续，求a

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x} & x\neq 0\\ a\cos x & x=0\end{cases}$$

例　考察 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在$x=0$的连续性

□　函数在区间上的连续

若 $f(x)$在区间 I内每点连续，且在 I的闭端点单侧连续，称 $f(x)$在区间I 连续

例 讨论 $f(x)=a^x$ 在**R**的连续性

1.4.2 间断点的分类

- **第一类间断点**

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 与 } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 均存在}$$

> 情况1 (可去间断点)

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0) \text{ 或 } f(x_0)\text{无定义}$$

例 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$

➤ 情况2 （跳跃间断点）

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

例 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x=0$

□ **第二类间断点**

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在

➤ 无穷型

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$，称$x_0$无穷间断点 例 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x=0$

➤ 其他型 例 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$

1.4.3 连续函数的运算

- 连续函数四则运算

若$f(x)$, $g(x)$在x_0连续， 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ $f(x)/g(x)$ （ $g(x_0)\neq 0$ ）在x_0也连续

- 复合

若 $g(x)$在x_0连续， $f(u)$ 在$u_0=g(x_0)$连续， 则复合函数 $f(g(x))$在x_0连续

- 这意味着此时

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(\lim_{x\to x_0} g(x))=f(g(x_0))$$

极限号通过函数符号

□ 初等函数的连续性

初等函数$f(x)$在定义域内连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

例 求极限

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x+\tan x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)$

$$(4)\ \lim_{x\to 0}(1+\arctan 2x)^{\csc 3x}$$

$$(5)\ \lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\cot(x-a)} \quad a\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$$(6)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+3}{2}}$$

例 讨论函数的连续性，且指出间断点类型

$$1)\ \ f(x)=\frac{e^x-1}{x(x-1)} \qquad 2)\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\ge 0\\ 2e^{2x}-1 & x<0\end{cases}$$

H.W　　习题1

22 (1)　23　24　26 (2) (3) (7) (8)

补充题

求极限

1) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1-\cos 2x}{\ln(1-2x)}}$　　2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\tan x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

1.4.4 闭区间上连续的性质

- 有界定理

若 $f(x)$在 $[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$有界

- 最值定理

若 $f(x)$在 $[a,b]$连续，则存在ξ_1、$\xi_2 \in [a,b]$，使

$$f(\xi_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x),\ f(\xi_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x),$$

- 零点存在定理

若 $f(x)$在$[a,b]$连续, $f(a)f(b) < 0$, 则存在$\xi \in (a,b)$,

$$f(\xi) = 0$$

- 联系函数曲线考虑这些性质

- 想一想如果条件不满足，结论如何？举例说明之

例　设 $a > b > 0$，试证：方程 $a\sin x = b$ 必有一个小于 $\frac{\pi}{2}$ 的正根

H.W

习题1

27